227	Fonctions de plusieurs variables: dvées partielles, différentiabilité, f° composées, f° C^1, exemples.	Composition	Monier 4 p.230

Prop 3: Soient E, F, G des ℝ-evn, $U\subset E=\mathbb{R}^n$, $V\subset F=\mathbb{R}^p$ deux ouverts, et deux applications $f:U\subset E\to F$, $g:V\subset F\to G=\mathbb{R}^q$ vérifiant $f(U)\subset V$. Soit a∈U.

Si f est différentiable en a, et g différentiable en $f(a)$, alors $g\circ f:U\to G$ est différentiable en a et:

$d(g\circ f)_a = dg_{f(a)}\circ df_a$. (M4 p230).

Attention, Monier fait la démo pour des fonctions de classe C^1, il faut donc l'adapter.

I. Démonstration.

A. Définition des voisinages de travail.

Posons $U_0=\left\{h\in\mathbb{R}^n \,/\, a+h\in U\right\}$ *(voisinage de a dans U)*

et $V_0=\left\{k\in\mathbb{R}^p \,/\, f(a)+k\in V\right\}$ *(voisinage de f(a) dans V)*

B. Traduction de la différentiabilité de f et g.

f est différentiable en a, donc *(pour traduire le $o(\|h\|)$)*: Il existe $\varepsilon_1:U_0\to\mathbb{R}^p$ tq $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_1(h)=0$, et:

$$\forall h\in U_0,\ f\Big(\underbrace{a+h}_{\in U}\Big)=f(a)+df_a(h)+\underbrace{\|h\|.\varepsilon_1(h)}_{o(\|h\|)}$$

g est différentiable en a, donc: Il existe $\varepsilon_2:V_0\to\mathbb{R}^q$ tq $\lim\limits_{k\to 0}\varepsilon_2(k)=0$, et:

$$\forall k\in V_0,\ g\Big(\underbrace{f(a)+k}_{\in V}\Big)=g\circ f(a)+dg_{f(a)}(k)+\underbrace{\|k\|.\varepsilon_2(k)}_{o(\|k\|)} \qquad (*)$$

C. Appliquons g à l'égalité qui définit la différentielle de f en a.

$\forall h\in U_0,$

$$f\Big(\underbrace{a+h}_{\in U}\Big)=f(a)+df_a(h)+\underbrace{\|h\|.\varepsilon_1(h)}_{o(\|h\|)}$$

$$\underbrace{g\circ f\Big(\underbrace{a+h}_{\in U}\Big)}_{\in f(U)\subset V}=g\Bigg(\underbrace{f(a)}_{\in f(U)\subset V}+\underbrace{df_a(h)+\underbrace{\|h\|.\varepsilon_1(h)}_{o(\|h\|)}}_{(1)}\Bigg)$$

où (1) est égal à f(a+h) – f(a), qui appartient à V_0. En effet : f(a)+[f(a+h)-f(a)] = f(a+h) ∈ f(U) ⊂ V.
On a donc bien le droit d'écrire l'égalité précédente.
Il vient, en appliquant (*):

$$gof(a+h)=g\circ f(a)+dg_{f(a)}\big(df_a(h)+\|h\|\varepsilon_1(h)\big)+\big\|df_a(h)+\|h\|\varepsilon_1(h)\big\|.\varepsilon_2\big(df_a(h)+\|h\|\varepsilon_1(h)\big)$$

Puis, par linéarité de $dg_{f(a)}$:

$$gof(a+h)=g\circ f(a)+\underbrace{dg_{f(a)}\circ df_a(h)}_{L(h)}+\underbrace{\|h\|dg_{f(a)}\big(\varepsilon_1(h)\big)+\big\|df_a(h)+\|h\|\varepsilon_1(h)\big\|.\varepsilon_2\big(df_a(h)+\|h\|\varepsilon_1(h)\big)}_{\alpha(h)}$$

On compose ici des DL d'ordre 1

D. remarquons que l'on a bien une partie linéaire.

Posant $L:h\in U_0\mapsto dg_{f(a)}\circ df_a(h)\in\mathbb{R}^q$

On a bien L linéaire (par composition d'appliactions linéaires).

E. Montrons que α(h) est une application convenable.

Considérons, pour tout h∈U₀, $\alpha(h)=\|h\|dg_{f(a)}(\varepsilon_1(h))+\|df_a(h)+\|h\|\varepsilon_1(h)\|.\varepsilon_2(df_a(h)+\|h\|\varepsilon_1(h))$.

On a: $df_a\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ et $dg_{f(a)}\in L(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)$. Or, en dimension finie, toute application linéaire est continue.

Donc *(Cf. Caractérisation des applications linéaires continues)*:

$\exists A\in\mathbb{R}^+$ tq: $\forall h\in\mathbb{R}^n, \|(df_a)(h)\|\leq A.\|h\|$, et:

$\exists B\in\mathbb{R}^+$ tq: $\forall k\in\mathbb{R}^p, \left\|\left(dg_{f(a)}\right)(k)\right\|\leq A.\|k\|$

D'où: $\left\|dg_{f(a)}(\varepsilon_1(h))\right\|\leq B.\|\varepsilon_1(h)\|$,

et: $\|df_a(h)+\|h\|\varepsilon_1(h)\|\leq\|df_a(h)\|+\|\|h\|\varepsilon_1(h)\|\leq A\|h\|+\|h\|.\|\varepsilon_1(h)\|\leq\|h\|.(A+\|\varepsilon_1(h)\|)$.

On a donc:

$$\alpha(h)=\|h\|\underbrace{dg_{f(a)}(\varepsilon_1(h))}_{\|.\|\leq B.\|\varepsilon_1(h)\|}+\underbrace{\|df_a(h)+\|h\|\varepsilon_1(h)\|}_{\|.\|\leq\|h\|.(A+\|\varepsilon_1(h)\|)}.\varepsilon_2(df_a(h)+\|h\|\varepsilon_1(h)).$$

D'autre part, comme on a: $\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0} df_a(h)=0 \text{ (car } df_a \text{ est linéaire en dim. finie donc continue en 0)}\\ \lim\limits_{h\to 0}\|h\|\varepsilon_1(h)=0 \text{ (par définition de } \varepsilon_1 \text{ et produit par } \|h\| \text{ qui est cont. en 0)}\\ \lim\limits_{k\to 0}\varepsilon_2(k)=0 \text{ (par définition de } \varepsilon_2\text{)}\end{cases}$,

par somme puis composition, on a bien: $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_2(df_a(h)+\|h\|\varepsilon_1(h))=0$.

Ce qui montre que α est bien de la forme $\alpha(h)=\|h\|.\varepsilon(h)$, avec $\varepsilon:U_0\to\mathbb{R}^q$ tel que $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$.

Finalement, on a, pour tou h∈U₀:

$gof(a+h)=g\circ f(a)+L(h)+\underbrace{\|h\|.\varepsilon(h)}_{o(\|h\|)}$, et en appliquant la définition de la différentiabilité, on conclut que:

$g\circ f$ est différentiable en a, et $d(g\circ f)_a=dg_{f(a)}\circ df_a$